Hỏi: Thế nào là sự trộn 4 sóng, sự phát sóng hài bậc III?

Trả lời:

I.SỰ TRỘN 4 SÓNG:

Giả sử có 3 sóng phẳng đơn sắc truyền dọc theo trục z vào một môi trường phi tuyến bậc III. Điện trường tổng hợp trong môi trường phi tuyến bậc ba sẽ là tổng hợp của ba điện trường ứng với ba sóng này:

$$E = E_1\cos\omega_1 t + E_2\cos\omega_2 t + E_3\cos\omega_3 t \qquad (1.1)$$

$E_1 = E_1(z,\omega_1)$, $E_2 = E_2(z,\omega_1)$ và $E_3 = E_3(z,\omega_3)$.

Để cho việc tính toán được thuận tiện và ngắn gọn, ta sẽ đặt $A_k = E_k\cos\omega_k t$ (*k*=*1*,*2*,*3*). Vậy theo (1.1):

$$E^3 = \left(\sum_{k=1}^{3} A_k\right)^3 = \sum_{k=1}^{3} A_k^3 + 3\sum_{k,l=1}^{3} A_k^2 A_l + 6A_1A_2A_3 \qquad (1.2)$$

Hãy xét từng số hạng dưới dấu xích ma:

$$A_k^3 = E_k^3\cos^3(\omega_k t) = \frac{3}{4}E_k^3\cos(\omega_k t) + \frac{1}{4}E_k^3\cos(3\omega_k t)$$

$$A_k^2 A_l = \frac{1}{2}E_k^2 E_l\cos(\omega_l t) + \frac{1}{4}E_k^2 E_l\cos(2\omega_k + \omega_l)t + \frac{1}{4}E_k^2 E_l\cos(2\omega_k - \omega_l)$$

k=1,2,3; l=1,2,3;Các cặp k,l khả dĩ là: (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1). (đại số tổ hợp)

$$A_1A_2A_3 = \frac{1}{4}E_1E_2E_3\left[\cos(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t + \cos(\omega_1-\omega_2+\omega_3)t + \cos(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) + \cos(-\omega_1-\omega_2+\omega_3)\right]$$

Độ phân cực phi tuyến bậc ba là:

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0\chi^{(3)}E^3$$

sẽ bao gồm các thành phần:

$$P(\omega_1) = \varepsilon_0\chi^{(3)}\left(\frac{3}{4}E_1^3 + \frac{1}{2}E_2^2E_1 + \frac{1}{2}E_3^2E_1\right)$$

$$P(\omega_2) = \varepsilon_0\chi^{(3)}\left(\frac{3}{4}E_2^3 + \frac{1}{2}E_1^2E_2 + \frac{1}{2}E_3^2E_2\right)$$

$$P(\omega_3) = \varepsilon_0\chi^{(3)}\left(\frac{3}{4}E_3^3 + \frac{1}{2}E_1^2E_3 + \frac{1}{2}E_2^2E_3\right)$$

$$P(\omega_1+\omega_2+\omega_3) = P(\omega_1-\omega_2+\omega_3) = P(-\omega_1+\omega_2+\omega_3) = P(-\omega_1-\omega_2+\omega_3) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}E_1E_2E_3$$

$$P(3\omega_1) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}E_1^3$$

$$P(3\omega_2) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}E_2^3$$

$$P(3\omega_3) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_3^3$$

$$P(2\omega_1 + \omega_2) = P(2\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_1^2 E_2$$

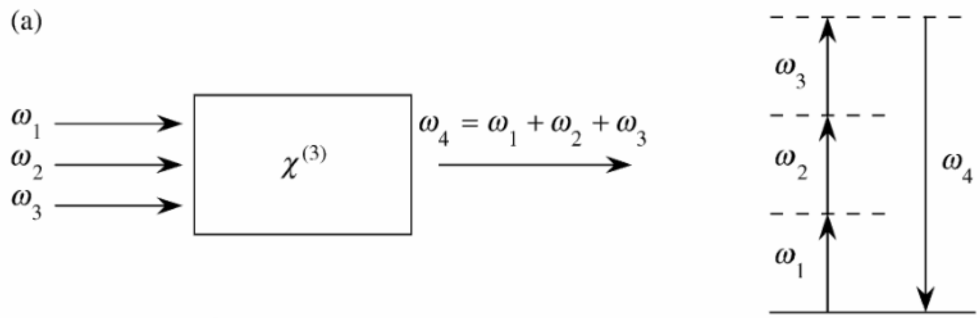
$$P(2\omega_2 + \omega_1) = P(2\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_2^2 E_1$$

$$P(2\omega_2 + \omega_3) = P(2\omega_2 - \omega_3) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_2^2 E_3$$

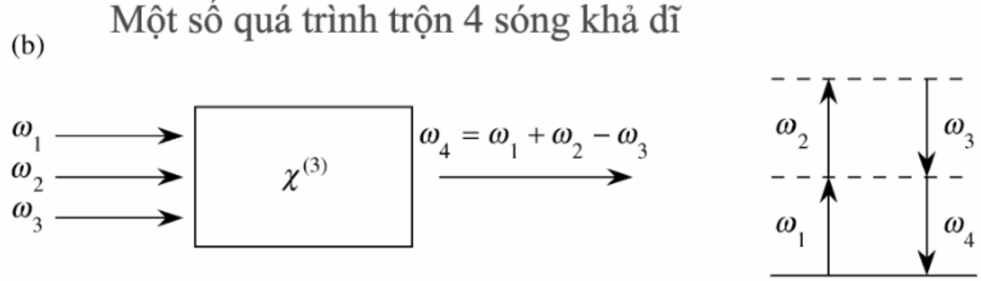
$$P(2\omega_3 + \omega_2) = P(2\omega_3 - \omega_2) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_3^2 E_2$$

$$P(2\omega_1 + \omega_3) = P(2\omega_1 - \omega_3) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_1^2 E_3$$

$$P(2\omega_3 + \omega_1) = P(2\omega_3 - \omega_1) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_3^2 E_1$$

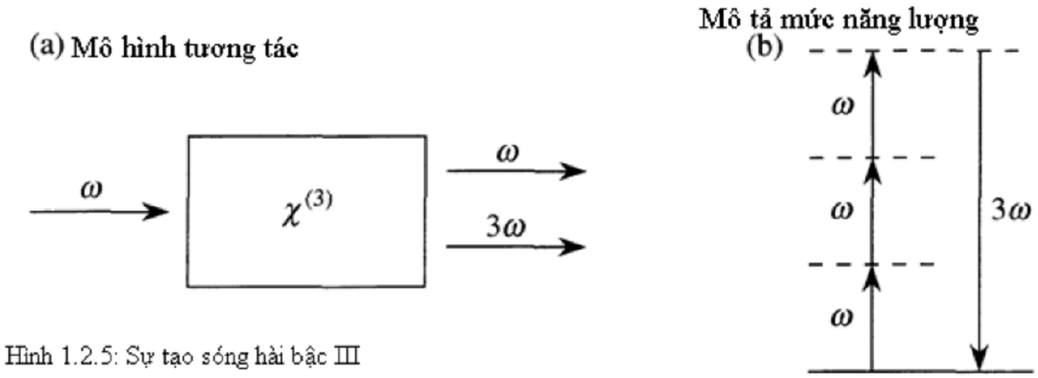


Một số quá trình trộn 4 sóng khả dĩ



II.SỰ PHÁT SÓNG HÀI BẬC III:

Sự phát sóng hài bậc III là một trường hợp riêng của sự trộn 4 sóng, trong đó $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ nên $\omega_4 = 3\omega$



Hình 1.2.5: Sự tạo sóng hài bậc III

$$P(\omega_1+\omega_2+\omega_3)=\frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}E_1E_2E_3$$

Suy ra: $P(3\omega)=\frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}E^3(\omega,z)$

Để thuận tiện cho các quá trình tính toán tiếp theo, chúng ta sẽ biểu diễn độ phân cực phi tuyến bậc III dưới dạng số phức:

$$\tilde{P}_{3\omega}^{NL}=\frac{1}{2}\left[P(3\omega,z)e^{-i3\omega t}e^{3ikz}+k_c\right]$$

Tương tự như khi khảo sóng hài bậc hai, ta cũng có:

$$\frac{dE(3\omega)}{dz}=\frac{3i\omega}{8cn_3}\chi^{(3)}(3\omega)E^3(\omega)e^{i\Delta k} \qquad (2.1)$$

Trong đó, $\Delta k=3k_\omega-k_{3\omega}=\frac{3\omega}{c}\left[n_\omega-n_{3\omega}\right]$

Lấy tích phân từ 0 đến L của (2.1):

$$E(3\omega)=\frac{3i\omega}{8cn_{3\omega}}\chi^{(3)}(3\omega)E^3(\omega)\int_0^L e^{i\Delta k}dz=\frac{3i\omega}{8cn_{3\omega}}\chi^{(3)}(3\omega)E^3(\omega)\left(\frac{e^{i\Delta kL}-1}{i\Delta k}\right)$$

Hiệu suất biến hoán công suất đối với sự phát sóng hài bậc III là:

$$e_{THG}=\frac{I_{3\omega}(L)}{I_\omega(0)}=\frac{9\omega^2}{16\varepsilon_0^2c^4n_\omega n_{3\omega}}\left|\chi^3(3\omega)\right|^2I_\omega^2(0)L^2\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)^2}\right)$$

Khảo sát điều kiện hợp pha (Tự làm nhé, chẳng có gì vui nữa! Sách quang phi tuyến của sinh viên, trang 79, từ công thức 4.2.6). Scan cho các bạn luôn.

Một điều đáng lưu ý trong khảo sát sự phát sóng hài bậc ba là sự đồng bộ pha. Để đơn giản trong các hiệu ứng quang học phi tuyến, chúng ta đã giả thiết phương truyền của tất cả các trường là theo một hướng Z. Tuy nhiên, nếu có một sóng khác truyền với vectơ sóng K_1 theo hướng khác ta có thể biểu diễn các sóng theo biểu thức:

$$E_i(r,t) = \frac{1}{2}E(\omega_i)e^{-i(\omega_i t - k_i r)} + \frac{1}{2}E^*(\omega_i)e^{i(\omega_i t - k_i r)} \quad (4.2.6)$$

thay vì biểu thức (4.1.3). Ví dụ, khảo sát sự phát sóng hài bậc ba mà trong đó có hai sóng với tần số ω, có vectơ sóng là k_1, và sóng khác có vectơ sóng là k_1', mà $|k_1'| = |k| = n(\omega)\frac{\omega}{c}$. Trong trường hợp này, điều kiện đồng bộ pha là $\Delta k = 0$, hay là:

$$2k_1 + k_1' = k_3 \tag{4.2.7}$$

nếu $|2k_1| + |k'|_1 \rangle k_3$ nghĩa là nếu môi trường tán sắc âm (chiết suất giảm khi tần số tăng) thì chúng ta có thể thỏa mãn hệ thức (4.2.7) bằng cách chọn góc giữa k_1 và k_1' theo hình 4.1. Góc này được xác định bởi chiết suất n(ω) và n(3ω). Điều bất lợi của đồng bộ pha đối với các nguồn không cộng tuyến là bức xạ bơm phải có cường độ lớn để bù vào sự giảm hiệu suất biến hoán. Trong một vài thí nghiệm để đồng bộ pha người ta có thể dùng các chùm cộng tuyến, trong trường hợp này từ (4.2.7) ta suy ra n(ω) = n(3ω). Dĩ nhiên, trong trường hợp tổng quát điều kiện đồng bộ pha sẽ không được thỏa mãn, vì môi trường phi tuyến bị tán sắc. Nhưng trong môi trường khí, chúng ta có thể dùng một cách khác để n(ω) = n(3ω) là cộng thêm một khí khác. Giả sử chất khí A được dùng trong phát sóng hài bậc ba là tán sắc bình thường, $n_A(3\omega) > n_A(\omega)$, bằng cách trộn thêm vào một lượng khí B mà $n_B(3\omega) < n_B(\omega)$, chúng ta có thể có $n_{AB}(\omega) < n_{AB}(3\omega)$. Bây giờ chúng ta ký hiệu n_p và n_n là chiết suất của hai chất khí có tán sắc âm và dương, đặt f_p và f_n là nồng độ riêng phần của chúng:

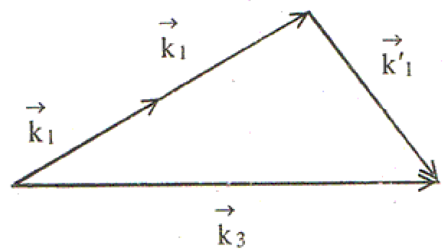
$$n(\omega) = f_n\, n_n(\omega) + f_p\, n_p(\omega) \tag{4.2.8a}$$

và

$$n(3\omega) = f_n\, n_n(3\omega) + f_p\, n_p(3\omega) \tag{4.2.8b}$$

là chiết suất của hỗn hợp. Từ $n(\omega) = n(3\omega)$ đòi hỏi rằng:

$$f_p n_p(\omega) + f_n n_n(\omega) = f_p n_p(3\omega) + f_n n_n(3\omega)$$



Hình 4.1. *Đồng bộ pha của nguồn không cộng tuyến*

hoặc
$$\frac{f_n}{f_p} = \frac{n_p(3\omega) - n_p(\omega)}{n_n(\omega) - n_n(3\omega)} \tag{4.2.9}$$

Người ta đã nhận được bức xạ 887Å nhờ sự phát sóng hài bậc ba với bức xạ 2660Å, chiếu vào một cuvet đựng Ar với áp suất vài Torr. Bức xạ 2660Å nhận được nhờ sự nhân đôi tần số hai lần của bức xạ 1,06μm laser Nd: YAG. Mặc dù hiệu suất biến hoán của sóng hài bậc ba rất nhỏ ($\sim 10^{-7}$), nhưng có thể phát được các bước sóng dưới 200Å bởi sự phát sóng hài bậc năm, bậc bảy hay các bậc cao hơn.

$E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_3 e^{-i\omega_3 t} + c.c$

$$\left(E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t + E_3 \cos\omega_3 t\right)^3 = E_1^3$$

$$\left(E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t + E_3 \cos\omega_3 t\right)^2 \left(E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t + E_3 \cos\omega_3 t\right)$$

$$\Big(E_1^2 \cos^2\omega_1 t + E_2^2 \cos^2\omega_2 t + E_3^2 \cos\omega_3 t + 2 E_1 E_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t + 2 E_1 E_3 \cos\omega_1 t \cos\omega_3 t$$
$$+ 2 E_2 E_3 \cos\omega_2 t \cos\omega_3 t \Big)$$

$$\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_1^* + a_2^* + a_3^*\right)^3$$

$$\left(A_1 + A_2 + A_3\right)^3 = \left(A_1 + A_2 + A_3\right)^2 \left(A_1 + A_2 + A_3\right)$$

$$= \left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + 2A_2A_3\right)\left(A_1 + A_2 + A_3\right)$$

$$= \cancel{A_1^3} + \cancel{A_1^2 A_2} + \cancel{A_1^2 A_3} + \cancel{A_2^2 A_1} + \cancel{A_2^3} + \cancel{A_2^2 A_3} + \cancel{A_3^2 A_1} + \cancel{A_3^2 A_2} + \cancel{A_3^3}$$
$$+ 2\cancel{A_1^2 A_2} + 2\cancel{A_1 A_2^2} + 2A_1A_2A_3 + 2\cancel{A_1^2 A_3} + 2A_1A_2A_3 + 2\cancel{A_1 A_3^2}$$
$$+ 2A_1A_2A_3 + 2\cancel{A_2^2 A_3} + 2\cancel{A_2 A_3^2}$$

$$= A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + \underline{3A_1^2A_2 + 3A_2^2A_1 + 3A_2^2A_3 + 3A_3^2A_2 + 3A_1^2A_3 + 3A_3^2A_1}$$
$$+ 6A_1A_2A_3$$

- $A_1^2 A_2 = E_1^2 \cos^2\omega_1 t\, E_2 \cos\omega_2 t = E_1^2 \dfrac{1+\cos 2\omega_1 t}{2} \cos\omega_2 t$

$$= \frac{E_1^2}{2}\left(\cos\omega_2 t + \cos 2\omega_1 t \cos\omega_2 t\right)$$

$$= \frac{E_1^2 E_2}{2}\left[\cos\omega_2 t + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1+\omega_2)\cos(2\omega_1-\omega_2)\right] = \frac{1}{2} E_1^2 E_2 \cos\omega_2 t + \frac{1}{4} E_1^2 E_2 \cos(2\omega_1+\omega_2)\ \cos(2\omega_1-\omega_2)$$

$A_1 = E_1 e^{-i\omega_1 t}$

- $A_1^3 = E_1^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega_1 t + \frac{1}{4}\cos 3\omega_1 t\right) = \frac{3}{4} E_1^3 \cos\omega_1 t + \frac{1}{4} E_1^3 \cos 3\omega_1 t$

oh, common boy, please stop!!